5.4.1 Gekoppelte Pendel

******

1 Motivation

Zwei gekoppelte Pendel schwingen je nach Anfangsbedingungen im Gleichtakt oder im Gegentakt. Bei der Überlagerung der beiden Normalschwingungen ergibt sich eine Schwebung. Ein sehr schöner und wichtiger Versuch!

2 Theorie

2.1 Fadenpendel

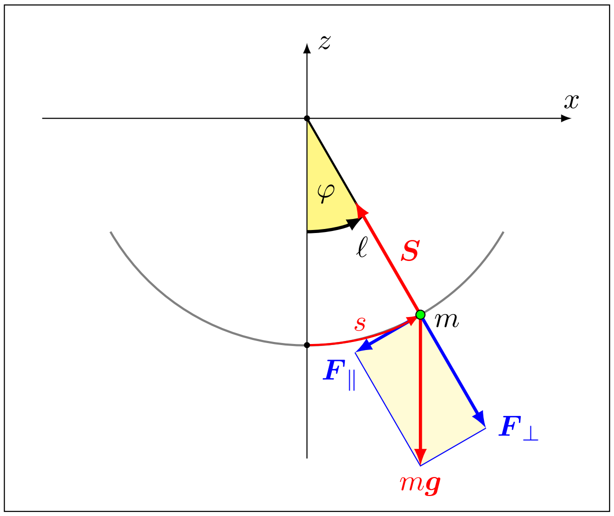

Abbildung 1: Mathematisches Pendel.

Wir betrachten einen Massenpunkt der Masse m, welcher über einen masselosen Faden der Länge ℓ an einem Punkt drehbar aufgehängt ist. Reibungskräfte am Drehpunkt sowie Luftwiderstand vernachlässigen wir. Damit wirken die Schwerkraft $m\boldsymbol{g}$ und die Seilkraft $\boldsymbol{S}$. Einen solchen idealisierten Aufbau nennt man das mathematische Pendel (siehe Abb. 1). Sei φ der Winkel zwischen dem Faden und der Vertikalen. Zur Herleitung der Schwingungsgleichung wenden wir den Satz von Newton an:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \tag{1}$$

Die Seilzugkraft $\boldsymbol{S}$ hebt die Wirkung der zur Bahn senkrechten Komponente $\boldsymbol{F}_\perp$ der Schwerkraft auf:

$$\boldsymbol{S} + \boldsymbol{F}_\perp = 0 \tag{2}$$

Damit wird der Massenpunkt m vom Faden auf eine Kreisbahn mit Radius ℓ gezwungen, da die von der Schwerkraft verursachte Beschleunigung nur eine Komponente tangential zu dieser Kreisbahn hat.

Sei s die vom Tiefpunkt des Pendels aus gemessene Bogenlänge, dann finden wir

$$m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -mg\ell\sin\varphi\,, \tag{3}$$

und, da die Bogenlänge $s = \ell\varphi$ ist,

$$m\ell \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -mg\sin\varphi \tag{4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0 \tag{5}$$

Für kleine Auslenkungen gilt die Näherung $\sin\varphi \approx \varphi$, so dass man schliesslich die Differentialgleichung

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0} \tag{6}$$

erhält. Es fällt auf, dass die Bewegung des Pendels unabhängig von der Masse m ist, die sich ja aus aus der Gleichung herausgekürzt hat! Es handelt sich hier um eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Dies ist die Gleichung des harmonischen Oszillators:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \tag{7}$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$\varphi(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t \tag{8}$$

Das Pendel beschreibt also eine harmonische Schwingung mit der Periode

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}} \tag{9}$$

Die Periode ist demnach unabhängig von der Masse des Pendels!

2.2 Gekoppelte Pendel

Zwei identische Pendel (Masse m) mit Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$ seien durch eine Feder mit Federkonstante k miteinander verbunden (siehe Abb. 2). Für kleine Auslenkungen $x_i, i = 1, 2$ kann die Schwingung als rein horizontal angenähert werden.

Dann lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + \frac{k}{m}(x_1 - x_2) = 0 \tag{10}$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - \frac{k}{m}(x_1 - x_2) = 0 \tag{11}$$

Dies sind zwei gekoppelte Differentialgleichungen 2. Ordnung. Zur Lösung machen wir den Ansatz mit den sogenannten **Normalkoordinaten**:

$$z_1 := x_1 - x_2 \tag{12}$$

$$z_2 := x_1 + x_2 \tag{13}$$

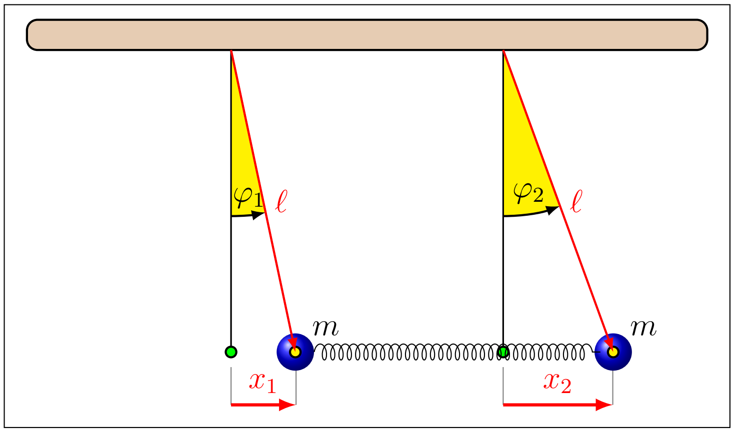

Abbildung 2: Zwei gekoppelte Pendel.

Durch Bildung der Summe bzw. der Differenz der Gleichungen (10) und (11) ergeben sich die beiden neuen Differentialgleichungen

$$\ddot{z}_2 + \omega_0^2 z_2 = 0 \tag{14}$$

$$\ddot{z}_1 + \omega_0^2 z_1 + 2\frac{k}{m} z_1 = 0 \tag{15}$$

Diese Gleichungen sind nun entkoppelt und stellen beide ungedämpfte Schwingungen dar, und zwar mit den Kreisfrequenzen

$$\omega_2 = \omega_0 \tag{16}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\frac{k}{m}} \tag{17}$$

Die allgemeine Lösung folgt aus der Rücktransformation zu den Ortskoordinaten x_1 und x_2:

$$x_1(t) = \tfrac{1}{2}\left(z_1 + z_2\right) \tag{18}$$

$$x_2(t) = \tfrac{1}{2}\left(z_1 - z_2\right) \tag{19}$$

Im allgemeinen Fall erhält man demnach wegen der Überlagerung dieser beiden Frequenzen eine Schwebung. Man kann aber auch durch geeignete Anfangsbedingungen Schwingungen mit nur einer dieser Frequenzen erzeugen:

a) Gleichläufige Schwingung

Falls $x_1(t) = x_2(t)\,, \forall t$, dann gilt:

$$z_1(t) \equiv 0 \quad \text{und} \quad z_2(t) = 2x_1(t)\,. \tag{20}$$

In diesem Fall ist nur die Normalschwingung $z_2(t)$ mit der **Eigenfrequenz** $\omega_2 = \omega_0$ angeregt (siehe Abb. 3).

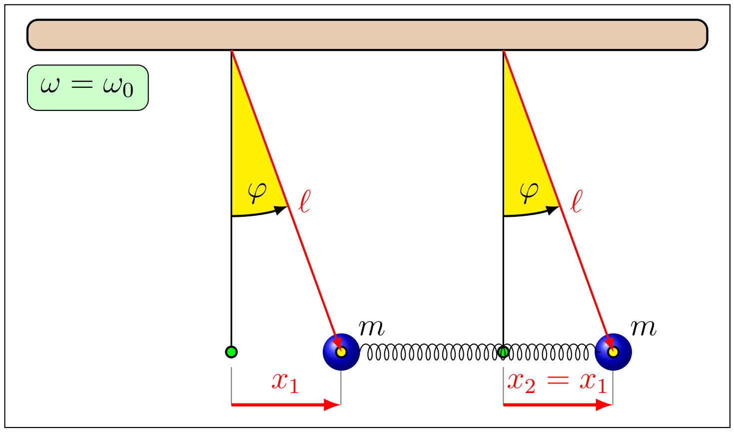

Abbildung 3: Zwei gekoppelte Pendel mit gleichläufiger Schwingung.

b) Gegenläufige Schwingung

Falls dagegen $x_1(t) = -x_2(t)\,, \forall t$, dann gilt:

$$z_1(t) = 2x_1(t) \quad \text{und} \quad z_2(t) \equiv 0\,. \tag{21}$$

In diesem Fall ist nur die Normalschwingung $z_1(t)$ mit der **Eigenfrequenz** ω_1 angeregt (siehe Abb. 4).

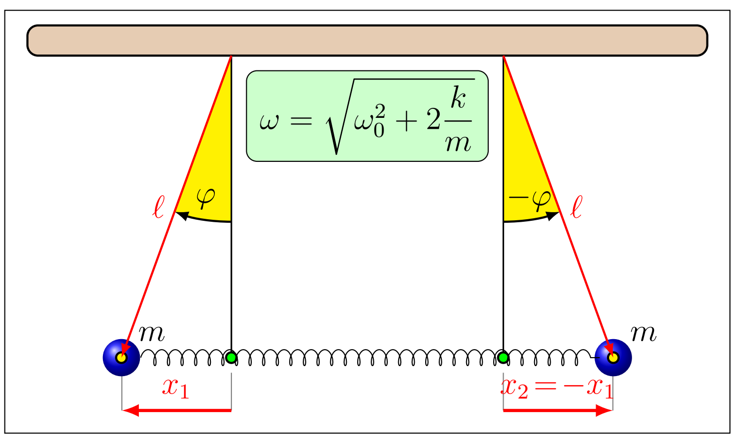

Abbildung 4: Zwei gekoppelte Pendel mit gegenläufiger Schwingung.

c) Allgemeiner Fall

Zum Schluss untersuchen wir noch den Fall, bei dem beide Normalschwingungen gleichzeitig auftreten. Als Beispiel wählen wir die folgenden Anfangsbedingungen:

Das Pendel Nr. 1 sei um A ausgelenkt, das Pendel Nr. 2 dagegen in Ruhelage, und beide seien bis zur Zeit $t = 0$ festgehalten und dann gleichzeitig losgelassen.

Die Anfangsbedingungen in den Koordinaten x_i lauten damit:

$$x_1 = A \qquad x_2 = 0 \tag{22}$$
$$\dot{x}_1 = 0 \qquad \dot{x}_2 = 0 \tag{23}$$

Für die Normalkoordinaten bedeutet das:

$$z_1 = A \qquad z_2 = A \tag{24}$$
$$\dot{z}_1 = 0 \qquad \dot{z}_2 = 0 \tag{25}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet:

$$z_1 = C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) \qquad z_2 = C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) \tag{26}$$

Mit den Anfangsbedingungen Gl. 22-23 folgt daraus:

$$z_1 = A \cos \omega_1 t \qquad z_2 = A \cos \omega_2 t \tag{27}$$

Die beiden Normalschwingungen haben demnach die gleiche Amplitude und die gleiche Phase zur Zeit $t = 0$. Nun kann man aber nicht die Normalschwingungen beobachten, sondern nur die Schwingungen der beiden Pendel getrennt. In den Koordinaten x_i lautet die Lösung:

$$x_1(t) = A \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \tag{28}$$
$$x_2(t) = A \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \tag{29}$$

Wir nehmen nun an, dass die Kopplung zwischen den Pendeln nur gering sei, dass also

$$\frac{k}{m} \ll \omega_0^2 \tag{30}$$

gilt. Dann ist $\omega_1 \overset{>}{\approx} \omega_2$ und

$$\omega_1 + \omega_2 \gg \omega_1 - \omega_2 \tag{31}$$

Es liegt also in diesem Fall wieder eine Schwebung vor (siehe Abb. 5).

Die Periode T der kleinen (modulierenden) Frequenz ist gleich

$$T = \frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{4\pi}{\sqrt{\omega_0^2 + 2k/m} - \omega_0} \tag{32}$$
$$= \frac{4\pi}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 + 2k/(m\omega_0^2)} - 1} \approx \frac{4\pi}{\omega_0} \cdot \frac{1}{\left\{1 + k/(m\omega_0^2)\right\} - 1} \tag{33}$$
$$\Rightarrow \quad T \approx \frac{4\pi m \omega_0}{k} \tag{34}$$

Man beachte auch den **Phasensprung** beim Nulldurchgang der Modulationsfrequenz, der durch deren Vorzeichenänderung zustande kommt.

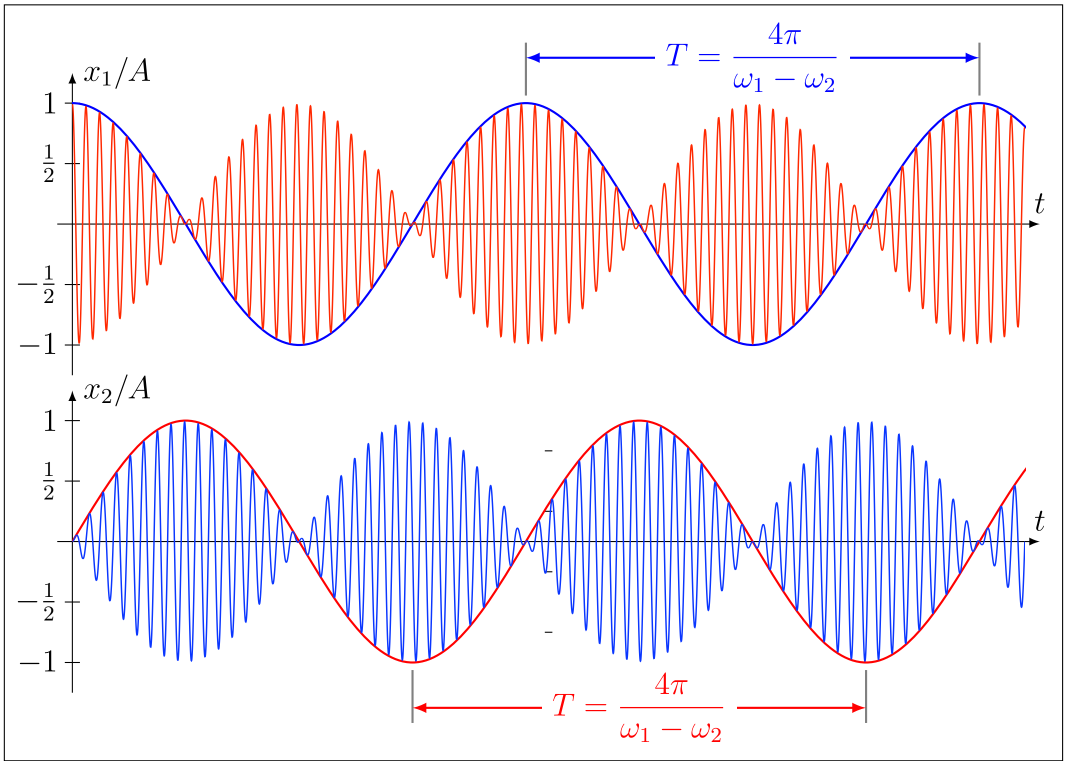

Abbildung 5: Schwebung bei 2 schwach gekoppelten identischen Pendeln.

Von ganz besonderem Interesse ist die Tatsache, dass zu bestimmten Zeiten eines der Pendel in Ruhe ist, während das andere die gesamte Energie übernommen hat. Diese Situation kehrt sich nach der Zeit $\Delta t = T/4$ derart um, dass dann das andere Pendel die Energie übernommen hat. Die Kopplung der beiden Pendel bietet also die Möglichkeit, Energie vollständig von einem Oszillator auf einen benachbarten Oszillator zu übertragen!

3 Experiment

Der Versuchsaufbau ist in Abb. 6 wiedergegeben. Die Auslenkung jedes Pendels wird durch eine Widerstandsmessung ermittelt und simultan auf einem xy-Schreiber wiedergegeben. Die drei verschiedenen Schwingungsmodi werden wie folgt erreicht:

a) Gleichläufige Schwingung

Beide Pendel werden in die gleiche Richtung und gleich weit ausgelenkt und dann losgelassen.

b) Gegenläufige Schwingung

Die Pendel werden zwar gleich weit, aber in entgegengesetzte Richtung ausgelenkt.

c) Allgemeiner Fall

Es wird nur ein Pendel ausgelenkt. Es ergibt sich eine Schwebung.

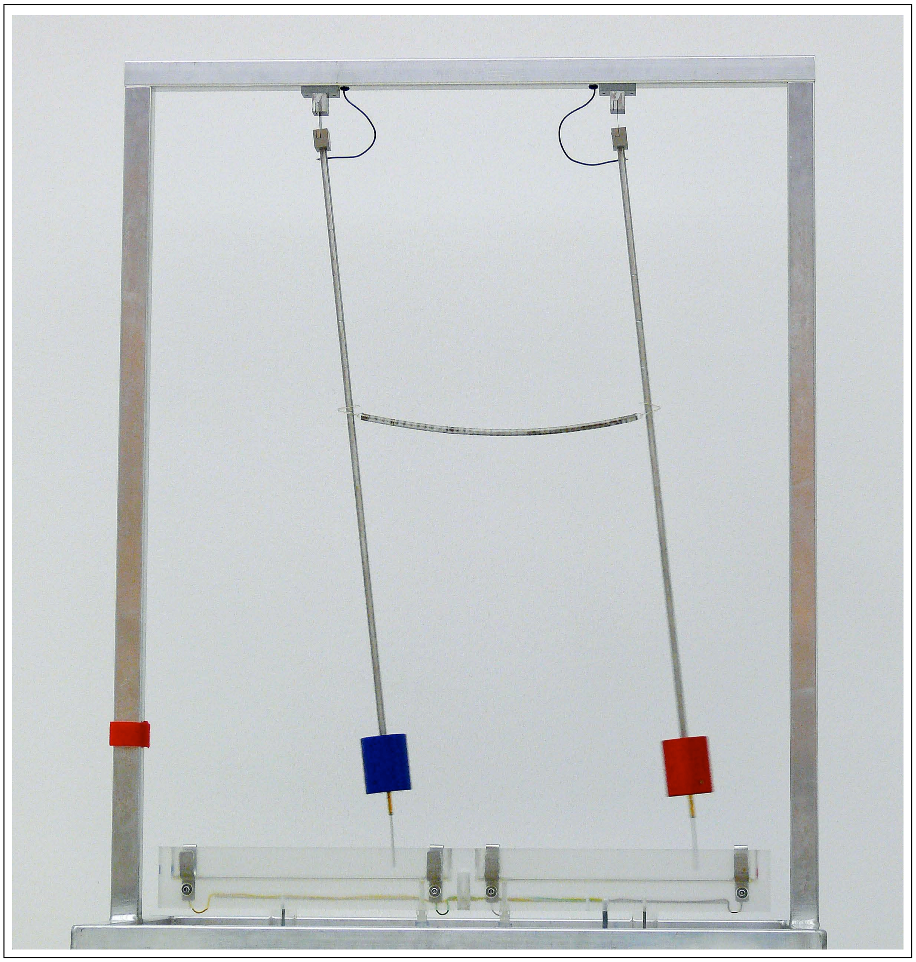

Abbildung 6: Versuchsaufbau „Gekoppelte Pendel“